二成分混合流体中における対流

広島大理　八幡英雄

最近二成分混合流体に現れるBenard対流が、実験的理論的にいくつかのグループによって研究されている[1)-5)]。実験においてよく用いられているのは、直方体中の8wt%から28wt%のエタノールを含んだ水である。この系のきわだった特徴として次のようなものがある：(1) Rayleigh数を上昇していくと、熱伝導状態から振動対流状態へ直接遷移する。(2) 対流ロール胞の進行波状態が現れる外部パラメータ領域がある。(3) 対流状態が空間的に局在して熱伝導状態の中に現れる外部パラメータ領域がある。(4) 上記の (3) 及び (4) の状態が同時に起ることがある。

さらに、直方体容器のロール軸に垂直方向の壁の境界条件の効果をとりはらうため、同軸二円柱間領域（環形 annulus）に閉じこめられた流体を用いた実験が、二つのグループによって行なわれた。この系を記述するため一つの模型方程式をつくり、その時間発展をcomputerで追跡した計算結果を、研究会で報告した。無次元化された運動方程式は、速度$\mathbf{u}$、温度Θ、温度と濃度のある一次結合からなる変数Hに対して、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \sigma \Delta \mathbf{u} - \sigma(\Theta - \frac{S}{1+S} H)\mathbf{e}_z + \frac{1}{\rho} \nabla \delta p = -(\mathbf{u} \bullet \nabla)\mathbf{u} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \Delta \Theta - R u_z = -(\mathbf{u} \bullet \nabla)\Theta \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \Delta \Theta - L \Delta H = -(\mathbf{u} \bullet \nabla) H \tag{3}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{u} = 0 \tag{4}$$

となる。ここでρは密度、δpは圧力、$\mathbf{e}_z$はz軸（垂直軸）方向の単位ベクトル、RはRayleigh数、σはPrandtl数、LはLewis数、Sは分離比を表す。境界条件は、$\mathbf{u} = \partial_n \mathbf{u}_n = 0$, $\Theta = \partial_z H = 0$ (水平壁), $\partial_n \Theta = \partial_n H = 0$ (垂直壁)。ただしnは壁の法線方向ベクトルである。いま環形を考え、方程式を円筒座標(r, φ, z)で書き表す。ここでrは動径、φは方位角,zは高さ方向のそれぞれ変数である。速度場$\mathbf{u}(u_r, u_\varphi, u_z)$は二次元的と仮定して、流れ関数$\Phi$を用いて

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \tag{5}$$

と表すと、場はΦ, Θ, Hの三個となる。さらに環形の領域を$\Gamma_1 < r < \Gamma_2$, $-0.5 < z < 0.5$, $-\pi < \varphi < \pi$で定義し、場を直交関数系を用いて次のようにモード展開する：

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{\ell,m,n} C_{\ell,m,n}(t) e^{i\ell\varphi} \chi_m\left(\frac{r-\Gamma_0}{r}\right)\phi_n(z) \tag{6}$$

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{\ell,m,n} T_{\ell,m,n}(t) e^{i\ell\varphi} \psi_m\left(\frac{r-\Gamma_0}{r}\right)\chi_n(z) \tag{7}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{\ell,m,n} E_{\ell,m,n}(t) e^{i\ell\varphi} \psi_m\left(\frac{r-\Gamma_0}{r}\right)\psi_n(z) \tag{8}$$

ここで、$\Gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1$、$\Gamma_0 = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$ で、それぞれの展開関数系は次の境界条件を満たす： $\phi_n(\pm 0.5) = \phi_n'(\pm 0.5) = \chi_n(\pm 0.5) = \psi_n'(\pm 0.5) = 0$ 。これらの展開を運動方程式に代入し Galyorkin 法により、各時間係数に対する常微分方程式系を導く。

具体的計算は Kolodner ら及び Kato-Sawada の実験のパラメータに対して、１８個のモードに truncate した方程式を用いた。線形安定解析により対流への遷移は、Hopf 分岐によることが見出された。さらに、一方向進行波成分のみに non-zero の初期値を与え、系の時間発展を computer で追うと、進行波解はしばらくは存続するが、やがて非線形相互作用により他方向に進む進行波も励起され、静止ロール解になってしまうという結果を得た。進行波解が不安定なことの解明は今後の課題である。

文献

1) R.W.Walden, P. Kolodner, A. Passner and C.M. Surko: Phys. Rev. Lett. **55**(85), 496.

2) R. Heinrich, G. Ahlers and D.S. Cannel, Phys. Rev. **A35**(87), 2761.

3) A.E. Deane, E. Knobloch and J.Toomre, Phys. Rev. **A37**(88), 1817.

4) M.C. Cross and K. Kim, Phys. Rev. **A37**(88), 3909.

5) P. Kolodner, D. Bensimon and C.M. Surko, Phys. Rev. Lett. **60**(88), 1723.